１. 確率

$\boxed{1}$

n を 3 以上の整数とする。1 から n までの番号をつけた n 枚の札の組が 2 つある。これら $2n$ 枚の札をよく混ぜ合わせて, 札を 1 枚ずつ 3 回取り出し, 取り出した順にその番号を X_1 , X_2 , X_3 とする。$X_1 < X_2 < X_3$ となる確率を求めよ。ただし一度取り出した札は元に戻さないものとする。

（京都大）

$\boxed{2}$

1 が書かれたカードが 2 枚, 2 が書かれたカードが 2 枚, $\cdots$, n が書かれたカードが 2 枚の合計 $2n$ 枚のカードがある。カードをよく混ぜ合わせた後, 1 枚ずつ左から順に並べる。このとき, カードに書かれている数の列を

$$a_1 \ , \ a_2 \ , \ \cdots \ , \ a_{2n}$$

とする。$a_k \geqq a_{k+1}$ $(1 \leqq k < 2n)$ となる最小の k を X とする。

(1) $X=1$ となる確率を求めよ。

(2) $X=n$ となる確率を求めよ。

(3) m は $1 \leqq m < n$ をみたす整数とする。$X \geqq m$ となる確率を求めよ。

（一橋大）

・偶然は, 準備のないものには微笑まない。

$\boxed{3}$

T , O , H , O , K , U , A , O , B , A の 10 文字をでたらめに 1 列に並べる。

(1) どの 2 つの O も隣り合わない確率を求めよ。

(2) どこかで同じ文字が隣り合う確率を求めよ。

（東北大）

$\boxed{4}$

3 本の当たりくじを含む 12 本のくじがある。A , B , C , D の 4 人がこの順番で, 1 本ずつ 1 回目のくじを引く。ただし, 引いたくじはもとに戻さない。全員が引き終えたら, 同様にして 2 回目, 3 回目のくじを引き, すべてのくじを引き終える。以下の問に答えよ。

(1) A の引いたくじがすべて当たりくじである確率を求めよ。

(2) B が 1 本だけ当たりくじを引く確率を求めよ。

(3) C の引いたくじがすべてはずれである確率を求めよ。

（北里大）

・あと 1 年しかないと思って何もしない人は,
　5 年あっても 10 年あっても何もしない。

$\boxed{5}$

1 つのさいころを投げ続けて, 同じ目が 2 回連続して出たら終了するものとする。

(1) 4 回目以内（4 回目も含む）に終了する確率を求めよ。

(2) r 回目以内（r 回目も含む）に終了する確率を求めよ。ただし, $r \geqq 2$ とする。

（北海道大）

$\boxed{6}$

1 から 6 までの目が等しい確率で出るさいころを 4 回投げる試行を考える。

(1) 出る目の最小値が 1 である確率を求めよ。

(2) 出る目の最小値が 1 で, かつ最大値が 6 である確率を求めよ。

（北海道大）

・学歴なんて, 本当の人間の価値とは何の関係もない。

$\boxed{7}$

サイコロを繰り返し n 回振って, 出た目の数を掛け合わせた積を X とする。すなわち, k 回目に出た目の数を Y_k とすると,

$$X = Y_1 Y_2 \cdots Y_n$$

である。
このとき

(1) X が 3 で割り切れる確率 p_n を求めよ。

(2) X が 4 で割り切れる確率 q_n を求めよ。

(3) X が 6 で割り切れる確率 r_n を求めよ。

（京都大）

$\boxed{8}$

さいころを n 回 ($n \geqq 2$) 投げ, k 回目 ($1 \leqq k \leqq n$) に出る目を X_k とする。

(1) 積 X_1X_2 が 18 以下である確率を求めよ。

(2) 積 $X_1X_2 \cdots X_n$ が偶数である確率を求めよ。

(3) 積 $X_1X_2 \cdots X_n$ が 4 の倍数である確率を求めよ。

(4) 積 $X_1X_2 \cdots X_n$ を 3 で割ったときの余りが 1 である確率を求めよ。

（千葉大）

・誰かを頼るべきである。でないと誰も, あなたにも頼れないのだ。

$\boxed{9}$

サイコロを n 回投げ, k 回目に出た目を a_k とする。また, s_n を $s_n=\sum_{k=1}^{n} 10^{n-k}a_k$ で定める。

(1) s_n が 4 で割り切れる確率を求めよ。

(2) s_n が 6 で割り切れる確率を求めよ。

(3) s_n が 7 で割り切れる確率を求めよ。

（一橋大）

$\boxed{10}$

(a) 同じ品質のりんご 9 個を 3 人の子供 A ,B , C に分け与えるとき, 次の各場合にそれぞれ, いく通りの分け方があるか。

(1) どの子供も少なくとも 1 個はもらうとする場合

(2) 1 個ももらわない子供があってもよいとする場合

(b) 次の式をみたす整数 x , y , z の組 (x , y , z) の総数を求めよ。

$$x+y+z=10$$
$$x\geqq 3 , y\geqq 2 , z\geqq -1$$

（頻出問題）

・未来も過去も, 全体として見れば, 見かけほどたいしたものじゃない。

$\boxed{11}$

9個のりんごを3人の子供A , B , Cにくばっていく。ただし1個ももらえない子供がいてもよいとする。

(1) 何通りのくばり方があるか。

(2) A君にちょうど4個のりんごがくばられる確率を求めよ。

(北海道大)

$\boxed{12}$

1 , 2 , 3 , 4が1つずつ記された4枚のカードがある。これらのカードから1枚を抜き出し元に戻すという試行をn回繰り返す。抜き出したn個の数の和をX_nとし, 積をY_nとする。

(1) $X_n \leqq n+3$となる確率をnで表せ。

(2) Y_nが8で割り切れる確率をnで表せ。

(一橋大)

・一番幸せなのは, 幸福なんて特別必要でないと悟ることです。

$\boxed{13}$

(1) 次の 3 条件（a），(b），(c）を満たす整数の組（a_1, a_2, a_3, a_4, a_5）の個数を求めよ。

(a) $a_1 \geqq 1$

(b) $a_5 \leqq 4$

(c) $a_i \leqq a_{i+1}$ $(i=1,2,3,4)$

(2) 次の 3 条件（a），(b），(c）を満たす整数の組（a_1, a_2, a_3, a_4, a_5）の個数を求めよ。

(a) $a_1 \geqq 1$

(b) $a_i \geqq 0$ $(i=2,3,4,5)$

(c) $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5 \leqq 4$

(3) n 桁の自然数で各桁の数字の合計が r 以下となるものの個数を n, r を用いて表せ。ただし $n \geqq 1, r \leqq 9$ とする。

（東京医科歯科大）

$\boxed{14}$

3 枚のコイン P, Q, R がある。P, Q, R の表の出る確率をそれぞれ p, q, r とする。このとき次の操作を n 回繰り返す。まず, P を投げて表が出れば Q を, 裏が出れば R を選ぶ。次にその選んだコインを投げて, 表が出れば赤玉を, 裏が出れば白玉をつぼの中にいれる。

(1) n 回ともコイン Q を選び, つぼの中には k 個の赤玉が入っている確率を求めよ。

(2) つぼの中が赤玉だけとなる確率を求めよ。

(3) $n=2004$, $p=\dfrac{1}{2}$, $q=\dfrac{1}{2}$, $r=\dfrac{1}{5}$ のとき, つぼの中に何個の赤玉が入っていることがもっとも起こりやすいかを求めよ。

（東工大）

・苦痛こそが生活なのだ。苦痛がなければ, いったい人生にどんな快楽があろう。

$\boxed{15}$

(1) さいころを続けて n 回投げるとき, 6 の約数の目が奇数回出る確率を $p(n)$ とする。

たとえば, $p(1)=\dfrac{2}{3}$, $p(2)=\boxed{\text{(カ)}}$ である。$n\geqq 2$ のとき $p(n)$ と $p(n-1)$ の間には

$p(n)=\boxed{\text{(キ)}}$ という関係式が成り立つ。これより n を用いて $p(n)$ をあらわすと

$p(n)=\dfrac{\boxed{\text{(ク)}}}{2}$ である。

(2) さいころを続けて 100 回投げるとき, 1 の目がちょうど k 回 $(0\leqq k\leqq 100)$ 出る確率は

${}_{100}C_k\times\dfrac{\boxed{\text{(ケ)}}}{6^{100}}$ であり, この確率が最大になるのは $k=\boxed{\text{(コ)}}$ のときである。

次に, さいころを続けて n 回投げるとき, 1 の目がちょうど k 回 $(0\leqq k\leqq n)$ 出る確率を考える。n を固定したとき, この確率を最大にするような k の値が 2 個存在するための必要十分条件は, n を $\boxed{\text{(サ)}}$ で割ったときの余りが $\boxed{\text{(シ)}}$ となることである。

(慶応大)

$\boxed{16}$

n 人 $(n\geqq 3)$ でじゃんけんを 1 回行うとき, 次の問いに答えよ。

(1) 1 人だけが勝つ確率を求めよ。

(2) あいこになる確率を求めよ。

(千葉大)

・やらずに後悔するより, やって後悔しろとよく言うが,
やって後悔することなど, まずあり得ないのである。

$\boxed{17}$

コンピュータの画面に, 記号○と×のいずれかを表示させる操作をくり返し行う。このとき, 各操作で, 直前の記号と同じ記号を続けて表示する確率は, それまでの経過に関係なく, p であるとする。

最初に, コンピュータの画面に記号×が表示された。操作をくり返し行い, 記号×が最初のものも含めて 3 個出るよりも前に, 記号○が n 個出る確率を P_n とする。ただし, 記号○が n 個出た段階で操作は終了する。

(1) P_2 を p で表せ。

(2) $n \geqq 3$ のとき, P_n を p と n で表せ。

（東京大）

$\boxed{18}$

投げたとき表が出る確率と裏が出る確率が等しい硬貨を用意する。数直線上に石を置き, この硬貨を投げて表が出れば数直線上で原点に関して対称な点に石を移動し, 裏が出れば数直線上で座標 1 の点に関して対称な点に石を移動する。

(1) 石が座標 x の点にあるとする。2 回硬貨を投げたとき, 石が座標 x の点にある確率を求めよ。

(2) 石が原点にあるとする。n を自然数とし, $2n$ 回硬貨を投げたとき, 石が座標 $2n-2$ の点にある確率を求めよ。

（京都大）

・**間違えることができるのは,**
その問題に挑戦する勇気をもつ者だけである。

19

表が出る確率が p, 裏が出る確率が $1-p$ であるような硬貨がある。ただし, $0<p<1$ とする。この硬貨を投げて, 次のルール(R)の下で, ブロック積みゲームを行う。

(R)
① ブロックの高さは, 最初は 0 とする。
② 硬貨を投げて表が出れば高さ 1 のブロックを 1 つ積み上げ, 裏が出ればブロックをすべて取り除いて高さ 0 に戻す。

n を正の整数, m を $0 \leqq m \leqq n$ を満たす整数とする。

(1) n 回硬貨を投げたとき, 最後にブロックの高さが m となる確率 p_m を求めよ。

(2) (1) で, 最後にブロックの高さが m 以下となる確率 q_m を求めよ。

(3) ルール(R)の下で, n 回硬貨投げを独立に 2 度行い, それぞれ最後のブロックの高さを考える。2 度のうち, 高い方のブロックの高さが m である確率 r_m を求めよ。ただし, 最後のブロックの高さが等しいときはその値を考えるものとする。

（東京大）

20

スイッチを 1 回押すごとに, 赤, 青, 黄, 白 のいずれかの色の玉が 1 個, 等確率 $\frac{1}{4}$ で出てくる機械がある。2 つの箱 L と R を用意する。次の 3 種類の操作を考える。

(A) 1 回スイッチを押し, 出てきた玉を L に入れる。

(B) 1 回スイッチを押し, 出てきた玉を R に入れる。

(C) 1 回スイッチを押し, 出てきた玉と同じ色の玉が, L になければその玉を L に入れ, L にあればその玉を R に入れる。

(1) L と R は空であるとする。操作 (A) を 5 回おこない, さらに操作 (B) を 5 回おこなう。このとき L にも R にも 4 色すべての玉が入っている確率 P_1 を求めよ。

(2) L と R は空であるとする。操作 (C) を 5 回おこなう。このとき L に 4 色すべての玉が入っている確率 P_2 を求めよ。

(3) L と R は空であるとする。操作 (C) を 10 回おこなう。このとき L にも R にも 4 色すべての玉が入っている確率を P_3 とする。$\frac{P_3}{P_1}$ を求めよ。

（東京大）

・明日死ぬかのように生きろ。永遠に生きるかのごとく学べ。

$\boxed{21}$

白黒 2 種類のカードがたくさんある。そのうち k 枚のカードを手もとにもっているとき, 次の操作（A）を考える。

（A） 手持ちの k 枚の中から 1 枚を, 等確率 $\dfrac{1}{k}$ で選び出し, それを違う色のカードにとりかえる。

以下の問（1）,（2）に答えよ。

(1) 最初に白 2 枚, 黒 2 枚, 合計 4 枚のカードをもっているとき, 操作（A）を n 回繰り返した後に初めて, 4 枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ。

(2) 最初に白 3 枚, 黒 3 枚, 合計 6 枚のカードをもっているとき, 操作（A）を n 回繰り返した後に初めて, 6 枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ。

（東京大）

$\boxed{22}$

立方体の面を 3 色を用いて 2 つずつ同じ色に塗る。次の問に答えよ。

(1) 向かい合う 2 面が, どの組についても同じ色で塗られる確率を求めよ。

(2) 向かい合う 2 面が, どの組についても同じ色にならない確率を求めよ。

(3) 向かい合う 2 面の組のうち, 2 面の色が同じになる組が 1 つの確率を求めよ。

（早稲田大）

・雑草とは, その美点がまだ発見されていない植物である。

$\boxed{23}$

n を正の整数とし, n 個のボールを 3 つの箱に分けて入れる問題を考える。ただし, 1 個のボールも入らない箱があってもよいものとする。以下に述べる 4 つの場合について, それぞれ相異なる入れ方の総数を求めなさい。

(1) 1 から n まで異なる番号のついた n 個のボールを, A , B , C と区別された 3 つの箱に入れる場合, その入れ方は全部で何通りあるか。
(2) 互いに区別のつかない n 個のボールを, A , B , C と区別された 3 つの箱に入れる場合, その入れ方は全部で何通りあるか。
(3) 1 から n まで異なる番号のついた n 個のボールを, 区別のつかない 3 つの箱に入れる場合, その入れ方は全部で何通りあるか。
(4) n が 6 の倍数 $6m$ であるとき, n 個の互いに区別のつかないボールを, 区別のつかない 3 つの箱に入れる場合, その入れ方は全部で何通りあるか。

（東京大）

$\boxed{24}$

数直線の原点上にある点が, 以下の規則で移動する試行を考える。

（規則） さいころを振って出た目が奇数の場合は, 正の方向に 1 移動し, 出た目が偶数の場合は, 負の方向に 1 移動する。

k 回の試行の後の, 点の座標を $X(k)$ とする。

(1) $X(10)=0$ である確率を求めよ。
(2) $X(1)\fallingdotseq 0$, $X(2)\fallingdotseq 0$, ……, $X(5)\fallingdotseq 0$ であって, かつ, $X(6)=0$ となる確率を求めよ。
(3) $X(1)\fallingdotseq 0$, $X(2)\fallingdotseq 0$, ……, $X(9)\fallingdotseq 0$ であって, かつ, $X(10)=0$ となる確率を求めよ。

（千葉大）

・運命は, 志のある者を導き, 志のなき者を引きずっていく。

$\boxed{25}$

1 枚の硬貨を投げて, A 君と B 君が次のようなゲームを行う。ゲーム開始時における A 君, B 君の得点はともに 0 点とする。毎回の硬貨投げの試行で表がでたとき A 君の勝ち, 裏がでたとき B 君の勝ちとし, 勝った方に $+1$ 点, 負けた方に -1 点がそれまでの得点に加えられるとする。

各試行は独立としてこの試行を続けたとき, 次の問に答えよ。ただし, 硬貨の表と裏のでる確率は, ともに $\dfrac{1}{2}$ である。また, n と m はともに 1 以上の整数とする。

(1) 3 回の試行の後, A 君の得点が 1 点である場合の数を求めよ。

(2) $2n$ 回の試行の後, A 君の得点が $2m$ 点である場合の数を求めよ。

(3) $2n$ 回の試行の後, A 君の得点が $2m$ 点とする。試行開始後 A 君の得点がつねに B 君の得点より多い確率を求めよ。

（北海道大）

$\boxed{26}$

A と B が n 枚のコインを分け, 次のようなゲームを行う。

1 個のサイコロを投げて, 出た目の数が 3 の倍数であれば, A は B にコインを 1 枚わたし, それ以外であれば, B は A にコインを 1 枚わたす。これをくり返し, 最終的に n 枚すべてを集めた方が勝ちとする。

A が k 枚, B が $n-k$ 枚のコインを持っているとき, A がこのゲームに勝つ確率を p_k とする。ただし, $p_0=0$, $p_n=1$ と考える。

(1) $n=2$ のとき, p_1 を求めよ。

(2) $1 \leqq k \leqq n-1$ のとき, p_k を p_{k+1} , p_{k-1} を用いて表せ。

(3) p_k を求めよ。

（破産の確率）

・自分から逃げれば逃げるほど, 生きがいも遠ざかる。

$\boxed{27}$

a を 2 以上の自然数とする。長さ a の線分 AB を数直線上で移動させる次のようなゲームを考える。さいころを投げて出た目が 2 以下ならば正の方向（右）へ 1 だけ, そうでなければ負の方向（左）へ 1 だけ, 線分を移動させる。これを繰り返して, どちらかの端点が原点 O に到達したときゲームは終了する。

n を $0<n<a$ を満たす自然数とする。線分の左端 A が初めは座標 $-n$ の位置にあり, A が原点 O に到達してゲームが終了する確率を p_n とする。また, $p_0=1$, $p_a=0$ とする。

(1) p_n を p_{n-1} と p_{n+1} を用いて表せ。

(2) 確率 p_n を求めよ。

（早稲田大）

$\boxed{28}$

2 つの箱 L と R , ボール 30 個, コイン投げで表と裏が等確率 $\dfrac{1}{2}$ で出るコイン 1 枚を用意する。x を 0 以上 30 以下の整数とする。L に x 個, R に $30-x$ 個のボールを入れ, 次の操作 (＃) を繰り返す。

(＃) 箱 L に入っているボールの個数を z とする。コインを投げ, 表が出れば箱 R から箱 L に, 裏が出れば箱 L から箱 R に, $K(z)$ 個のボールを移す。ただし, $0 \leqq z \leqq 15$ のとき $K(z)=z$, $16 \leqq z \leqq 30$ のとき $K(z)=30-z$ とする。

m 回の操作の後, 箱 L のボールの個数が 30 である確率を $P_m(x)$ とする。

たとえば $P_1(15)=P_2(15)=\dfrac{1}{2}$ となる。以下の問（1）,（2）,（3）に答えよ。

(1) $m \geqq 2$ のとき, x に対してうまく y を選び, $P_m(x)$ を $P_{m-1}(y)$ で表せ。

(2) n を自然数とするとき, $P_{2n}(10)$ を求めよ。

(3) n を自然数とするとき, $P_{4n}(6)$ を求めよ。

（東京大）

・嘘で固めた自分で好かれるよりも
本当の自分で嫌われる方がよい。

$\boxed{29}$

A, B, C の 3 つのチームが参加する野球の大会を開催する。以下の方式で試合を行い, 2 連勝したチームが出た時点で, そのチームを優勝チームとして大会は終了する。

(a) 1 試合目で A と B が対戦する。
(b) 2 試合目で, 1 試合目の勝者と, 1 試合目で待機していた C が対戦する。
(c) k 試合目で優勝チームが決まらない場合は, k 試合目の勝者と, k 試合目で待機していたチームが $k+1$ 試合目で対戦する。ここで k は 2 以上の整数とする。

なお, すべての対戦において, それぞれのチームが勝つ確率は $\dfrac{1}{2}$ で, 引き分けはないものとする。

(1) n を 2 以上の整数とする。ちょうど n 試合目で A が優勝する確率を求めよ。
(2) m を正の整数とする。総試合数が $3m$ 回以下で A が優勝したとき, A の最後の対戦相手が B である条件付き確率を求めよ。

（東京大）

$\boxed{30}$

n を 2 以上の自然数とする。1 つのさいころを n 回投げ, 第 1 回目から第 n 回目までに出た目の最大公約数を G とする。

(1) $G=3$ となる確率を n の式で表せ。
(2) G の期待値を n の式で表せ。

（大阪大）

・考えて動けなくなるくらいなら, 考える暇もないくらい動け！

$\boxed{31}$

n を 3 以上の自然数とする。スイッチを入れると等確率で赤色または青色に輝く電球が横一列に n 個並んでいる。これらの n 個の電球のスイッチを同時に入れたあと, 左から電球の色を見ていき, 色の変化の回数を調べる。

(1) 赤青……青, 赤赤青……青, ……のように左端が赤色で色の変化がちょうど 1 回起きる確率を求めよ。
(2) 色の変化が少なくとも 2 回起きる確率を求めよ。
(3) 色の変化がちょうど m 回 $(0 \leqq m \leqq n-1)$ 起きる確率を求めよ。
(4) 色の変化の回数の期待値を求めよ。

（九州大）

$\boxed{32}$

赤い箱に赤玉が 4 個, 白玉が 2 個入っています。白い箱には, 赤玉が 2 個, 白玉が 4 個入っています。第 1 回目の試行では, 赤い箱から玉を 1 個取り出して, 赤い箱に戻します。この第 1 回目の試行で赤玉を取り出した場合は, 第 2 回目の試行で赤い箱から玉を 1 個取り出して赤い箱に戻します。また, 第 1 回目の試行で白玉を取り出した場合は, 第 2 回目の試行で白い箱から玉を 1 個取り出して白い箱に戻します。以下, 同様の試行を繰り返します。すなわち, 第 n 回目の試行で赤玉を取り出した場合には, 第 $n+1$ 回目の試行で赤い箱から玉を 1 個取り出して赤い箱に戻し, 第 n 回目の試行で白玉を取り出した場合には,
第 $n+1$ 回目の試行で白い箱から玉を 1 個取り出して白い箱に戻します。

第 n 回目の試行で赤が出る確率を P_n とするとき, P_n に関する漸化式

$$P_{n+1}=\frac{\boxed{}}{\boxed{}}P_n+\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

が成立します。このことから

$$P_n=\frac{\boxed{}}{\boxed{}}+\frac{1}{\boxed{}}\times\left(\frac{\boxed{}}{\boxed{}}\right)^n$$

であることがわかります。そして, 第 1 回目から第 n 回目までに赤玉が取り出される回数の期待値は

$$\frac{\boxed{}}{\boxed{}}\times n+\frac{1}{\boxed{}}\times\left\{\boxed{}-\left(\frac{\boxed{}}{\boxed{}}\right)^n\right\}$$

となります。

（慶応大）

・誰かのプランや言葉より, 自分の夢に従える人生を送りなさい

２．整数問題（因数分解型）

1

［A］ 等式 $ab=2a+4b-5$ を満たす正の整数 a, b の組をすべて求めよ。

［B］ x, y を自然数とするとき, $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{4}$ となる x, y の値の組 (x, y) をすべて求めよ。

［C］ 等式 $m^2-n^2=364$ を満たす自然数 m, n の組をすべて求めよ。

（頻出問題）

2

$3p^3-p^2q-pq^2+3q^3=2013$ を満たす正の整数 p, q の組をすべて求めよ。

（一橋大）

・何もかも失われたときにも, 未来だけはまだ残っている。

$\boxed{3}$

正の整数の組(a, b)で, a以上b以下の整数の総和が500となるものをすべて求めよ。ただし, $a<b$とする。

（大阪大）

$\boxed{4}$

3以上9999以下の奇数aで, a^2-aが10000で割り切れるものをすべて求めよ。

（東京大）

・成功者とは, 成功しようと決心し, 努力した人である。
　失敗者とは, 成功しようと決心し, 願った人である。

$\boxed{5}$

自然数 a , b , c が $3a=b^3$, $5a=c^2$ を満たし, d^6 が a を割り切るような自然数 d は $d=1$ に限るとする。

(1) a は 3 と 5 で割り切れることを示せ。

(2) a の素因数は 3 と 5 以外にないことを示せ。

(3) a を求めよ。

（東工大）

・何かを学ぶためには, 自分で体験する以上にいい方法はない。

３. 整数問題（余りで分類型）

$\boxed{1}$

整数 a , b , c が $a^2+b^2=c^2$ を満たしている。このとき, 次を証明せよ。

(1) a , b のうち少なくとも一方は偶数。

(2) a , b のうち少なくとも一方は 3 の倍数。

（一橋大）

$\boxed{2}$

n を 2 以上の整数とするとき, 次の問いに答えよ。

(1) n^3-n が 6 で割り切れることを証明せよ。

(2) n^5-n が 30 で割り切れることを証明せよ。

（弘前大）

・人は悲しいと感じることができるから, 人に優しくできるのであり,
悔しいと感じることができるから, 挑戦できるのだ。

$\boxed{3}$

(1) 正の整数 n で n^3+1 が 3 で割り切れるものをすべて求めよ。

(2) 正の整数 n で n^n+1 が 3 で割り切れるものをすべて求めよ。

（一橋大）

$\boxed{4}$

自然数 n に対し，$S_n=1^n+2^n+3^n+4^n$ とおく。このとき，

(1) S_n が 6 の倍数であるための条件を求めよ。

(2) S_n は 12 の倍数にならないことを示せ。

（奈良県立医科大）

・人生の宝物は，決まってどん底だけに落ちているものである。

４. 整数問題（不等式で範囲をしぼる型）

$\boxed{1}$

次の問いに答えよ。

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1 \\ 1<x<y<z \end{cases}$$

を満たす整数 x, y, z を求めよ。

（東京理科大）

$\boxed{2}$

3 つの自然数の組 (a, b, c) は, 条件

$$a<b<c \text{ かつ } \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<\frac{1}{3}$$

を満たす。このような組 (a, b, c) のうち, c の最も小さいものをすべて求めよ。

（一橋大）

・あなたが空しく生きた今日は,
昨日死んでいった者があれほどに生きたいと願った明日。

$\boxed{3}$

方程式 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2y}+\dfrac{1}{3z}=\dfrac{4}{3}$ ……① を満たす正の整数の組 (x, y, z) について考える。

(1) $x=1$ のとき, 正の整数 y, z の組をすべて求めよ。

(2) x のとりうる値を求めよ。

(3) 方程式①を解け。

（早稲田大）

$\boxed{4}$

a, b, c は $1<a<b<c$ を満たす整数とし, $(ab-1)(bc-1)(ca-1)$ は abc で割り切れるとする。このとき次の問いに答えよ。

(1) $ab+bc+ca-1$ は abc で割り切れることを示せ。

(2) a, b, c をすべて求めよ。

（東工大）

・人生は 1 つの物語だ。はじまりがあり, 終わりがある。

$\boxed{5}$

次の等式を満たす自然数 a , b , c , d をすべて求めよ。

$$abcd = a + b + c + d$$

（東京女子大）

$\boxed{6}$

三角形 ABC において, $\tan \mathrm{A}$, $\tan \mathrm{B}$, $\tan \mathrm{C}$ の値がすべて整数であるとき, それらの値を求めよ。

（一橋大）

・人が最も成長するのは, 傷ついたときである。

$\boxed{7}$

n , a , b , c , d は 0 または正の整数であって

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2+d^2=n^2-6 \\ a+b+c+d \leqq n \\ a \geqq b \geqq c \geqq d \end{cases}$$

を満たすものとする。このような数の組 (n , a , b , c , d) をすべて求めよ。

（東京大）

・遅かれ早かれ, 自分が勝てると信じている人が勝つ。

5．整数問題（論証型・ガウス記号）

$\boxed{1}$

n を正の整数とする。

n^2 と $2n+1$ は互いに素であることを示せ。

（一橋大）

$\boxed{2}$

自然数 $n=1, 2, 3, \cdots\cdots$ に対して，$(2-\sqrt{3})^n$ という形の数を考える。これらの数はいずれも，それぞれ適当な自然数 m が存在して $\sqrt{m}-\sqrt{m-1}$ という表示を持つことを示せ。

（東工大）

・夢の実現を妨げている最大の要因は，あなた自身である。

$\boxed{3}$

n が自然数であるとき, 2^n-1 が素数ならば, n も素数であることを証明しなさい。

（京都府立医科大）

$\boxed{4}$

p を素数, n を正の整数とするとき, $(p^n)!$ は p で何回割り切れるか。

（京都大）

・あまりにも多くの人が恐怖心にとらわれ,
夢を追うことができずにいる。

$\boxed{5}$

2 次方程式 $x^2-4x-1=0$ の 2 つの実数解のうち大きいものを α, 小さいものを β とする。
$n=1, 2, 3, \cdots$ に対し,

$$s_n=\alpha^n+\beta^n$$

とおく。

(1) s_1, s_2, s_3 を求めよ。また, $n \geqq 3$ に対し, s_n を s_{n-1} と s_{n-2} で表せ。

(2) β^3 以下の最大の整数を求めよ。

(3) α^{2003} 以下の最大の整数の 1 の位の数を求めよ。

（東京大）

$\boxed{6}$

次の条件を満たす組 (x, y, z) を考える。

条件 (A) ： x, y, z は正の整数で, $x^2+y^2+z^2=xyz$ および $x \leqq y \leqq z$ を満たす。

以下の問いに答えよ。

(1) 条件 (A) を満たす組 (x, y, z) で, $y \leqq 3$ となるものをすべて求めよ。

(2) 組 (a, b, c) が条件 (A) を満たすとする。このとき, 組 (b, c, z) が条件 (A) を満たすような z が存在することを示せ。

(3) 条件 (A) を満たす組 (x, y, z) は無数に存在することを示せ。

（東京大）

・あなたは最も多くの時間を共有している
　5 人の人物の平均である。

$\boxed{7}$

a , b は実数で, $a^2+b^2=16$, $a^3+b^3=44$ を満たしている。このとき,

(1) $a+b$ の値を求めよ。

(2) n を 2 以上の整数とするとき, a^n+b^n は 4 で割り切れる整数であることを示せ。

（東京大）

$\boxed{8}$

すべての正の整数 n に対して, 5^n+an+b が 16 の倍数となるような 16 以下の正の整数 a , b を求めよ。

（一橋大）

・人間の最大の弱点は諦めることだ。成功するための最も確実な方法はつねにもう一度やってみることである。

$\boxed{9}$

n は正の整数とする。x^{n+1} を x^2-x-1 で割った余りを

$$a_n x+b_n$$

とおく。

(1) 数列 $a_n, b_n, n=1,2,3,\cdots,$ は

$$\begin{cases} a_{n+1}=a_n+b_n \\ b_{n+1}=a_n \end{cases}$$

を満たすことを示せ。

(2) $n=1,2,3,\cdots$ に対して, a_n, b_n は共に正の整数で, 互いに素であることを証明せよ。

（東京大）

$\boxed{10}$

実数 x に対して $n \leqq x < n+1$ を満たす整数 n を $[x]$ で表す。

$$4[x]^2-36[x]+45<0$$

を満たす x の範囲を求めよ。

（一橋大）

・障害物とは, 目標から目をそらしたときに見えるものである。

$\boxed{11}$

実数 x に対して, x 以下の最大の整数を $[x]$ で表す。以下の問に答えよ。

(1) $\dfrac{14}{3}<x<5$ のとき, $\left[\dfrac{3}{7}x\right]-\left[\dfrac{3}{7}[x]\right]$ を求めよ。

(2) すべての実数 x について, $\left[\dfrac{1}{2}x\right]-\left[\dfrac{1}{2}[x]\right]=0$ を示せ。

(3) n を正の整数とする。実数 x について, $\left[\dfrac{1}{n}x\right]-\left[\dfrac{1}{n}[x]\right]$ を求めよ。

（早稲田大）

$\boxed{12}$

実数 a に対して, a を超えない最大の整数を $[a]$ で表す。10000 以下の正の整数 n で $[\sqrt{n}\,]$ が n の約数となるものは何個あるか。

（東工大）

・「時間」は, あなたが持つ最大の資源である。