

xy 平面上の 2 曲線 $C_1: y = \frac{\log x}{x}$ と $C_2: y = ax^2$ は点 P を共有し、 P において共通の接線をもっている。ただし、 a は定数とする。次の問いに答えよ。

- (1) 関数 $y = \frac{\log x}{x}$ の増減、極値、グラフの凹凸、変曲点を調べ、 C_1 の概形を描け。ただし、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0 \text{ は証明なしに用いてよい。}$$

- (2) P の座標および a の値を求めよ。
- (3) 不定積分 $\int \left(\frac{\log x}{x} \right)^2 dx$ を求めよ。
- (4) C_1, C_2 および x 軸で囲まれる部分を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ。

(横浜国立大)